YTU FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

KUATERNİYONLAR VE HESAPLAMALARI

Arzu KARABULUT 17025040

Danışman: Doç. Dr. Yasemin ALAGÖZ

ÖZET

Bu bitirme projesinde reel, genelleştirilmiş, kompleks (bikuaterniyonlar), dual (tam dejenere) kuaterniyonlar tanımlanmış ve bu kuaterniyonların temel özellikleri incelenmiştir. Genelleştirilmiş, dual ve kompleks kuaterniyonların kutupsal gösterimi verilmiştir. Reel, kompleks ve dual kuaterniyonların Euler formülleri incelenmiştir. Uygulamalarda kullanılabilmek amaçlı reel kuaterniyonların De-Moivre formülleri, kuvveti ve köklerini hesaplama yöntemleri verilmiş ve bu yöntemler örneklendirilmiştir.

KUATERNİYONLAR

Reel Kuaterniyonlar

Reel kuaterniyonlar (kuaterniyonlar) kümesi $\mathbb{H} =\{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ ile tanımlanır. $\mathbb{H}$ kümesinin her bir elemanına reel kuaterniyonlar denir. Bu kümenin $\{1, i, j, k\}$ baz elemanlarının çarpımı

$i^2 = -1,\ \ j^2 = -1,\ \ k^2 = -1, ijk = -1$ şeklindedir.

Herhangi $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ve $p = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ iki reel kuaterniyonun toplamı, çarpımı, eşleniği, normu ve tersi

- $q + p = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$
- $qp = (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)$
- $= a_0 b_0 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1)k$
- $\bar{q} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$
- $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$

şeklindedir.

Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar

$\mathbb{H}_G = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ genelleştirilmiş kuaterniyonlar kümesi olup bu kümenin $\{1, i, j, k\}$ baz elemanlarının çarpımı, $i^2 = -\alpha,\ j^2 = -\beta,\ k^2 = -\alpha\beta,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = \beta i,\ ki = ik = \alpha$ şeklinde tanımlanmıştır.

Özel Haller

- $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda **reel kuaterniyonlar**
- $\alpha = 1, \beta = -1$ seçilmesi durumunda **split kuaterniyonlar**
- $\alpha = 1, \beta = 0$ seçilmesi durumunda **semi-kuaterniyonlar**
- $\alpha = -1, \beta = 0$ seçilmesi durumunda **split semi-kuaterniyonlar**
- $\alpha = 0, \beta = 0$ seçilmesi durumunda **Quasi(1/4) kuaterniyonlar**

elde edilir.

Dual Kuaterniyonlar (Tam Dejenere ya da Null Kuaterniyon)

$\mathbb{H}_D = \{Q = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k \mid A_0, A_1, A_2, A_3 \in \mathbf{D}\}$ kümesi dual kuaterniyonlar kümesidir. Burada $\{1, i, j, k\}$ baz elemanlarının çarpımı, $i^2 = j^2 = k^2 = 0$, $ij = jk = ki = ijk = 0$ şeklinde tanımlanır.

Kompleks Kuaterniyonlar (Biquaternions)

$\mathbb{H}_C = \{Q_c = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k : Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbf{C},\ i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$ kümesi kompleks kuaterniyonlar kümesidir.

$q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ve $q_2 = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ iki reel kuaterniyon olmak üzere Q_c kompleks kuaterniyonu bu iki reel kuaterniyonun kombinasyonu olarak ,

$Q_c = q_1 + iq_2 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + i(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) = a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)i + (a_2 + ib_2)j + (a_3 + ib_3)k = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$ şeklindedir.

Kompleks kuaterniyonun kuaterniyon, kompleks ve hermityen eşleniği sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

- $\overline{Q_c} = Q_0 - Q_1 i - Q_2 j - Q_3 k$
- $Q_c^c = a_0 - ib_0 + (a_1 - ib_1)i + (a_2 - ib_2)j + (a_3 - ib_3)k$
- ${Q_c}^h = a_0 - ib_0 - (a_1 - ib_1)i - (a_2 - ib_2)j - (a_3 - ib_3)k$

Ayrıca normu ve tersi de

- $\|Q_c\| = \sqrt{Q_c \overline{Q_c}} = \sqrt{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}$
- ${Q_c}^{-1} = \frac{Q_0 - Q_1 i - Q_2 j - Q_3 k}{\sqrt{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}}$

şeklindedir.

KAYNAKÇA

[1] Alagöz, Y., & Özyurt, G. (2020). Linear Equations Systems of Real and Complex Semi-Quaternions. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, 44(5), 1483-1493.

[2] Majernik, V. (2006). Quaternion formulation of the Galilean space-time transformation. Acta Physica Slovaca, 56(1), 9-14.

[3] Özdemir, M. (2020). Kuaterniyonlar ve geometri. Altı Nokta Yayınları, İzmir.

KUATERNİYONLARDA HESAPLAMALAR

Reel Kuaterniyonların Kutupsal Gösterim

q reel kuaterniyonunun, reel eksen ile yaptığı açının α olduğunu kabul edelim.

$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ reel kuaterniyonunu $q = S_q + V_q$ şeklinde de ifade edebiliyorduk. Burada S_q skaler kısmı V_q vektörel kısmı göstermektedir. Bu reel kuaterniyonu göz önüne alırsak,

$\vec{n} = \frac{V_q}{\|V_q\|}$, cosα $= \frac{S_q}{\|q\|}$ ve sinα $= \frac{\|V_q\|}{\|q\|}$ olmak üzere, $q = \|q\|(\cos\alpha + \vec{n}\sin\alpha)$ olarak ifade edebiliriz.

Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Kutupsal Gösterim

$q_g = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ genelleştirilmiş kuaterniyonunu göz önüne alalım. Burada cosα= $\frac{a_0}{\|q_g\|}$

sinα= $\frac{\sqrt{\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2}}{\|q_g\|}$ ve $\vec{n} = \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2}}$ seçilerek genelleştirilmiş kuaterniyonların kutupsal gösterimi

$q_g = \|q_g\|(\cosh\alpha + \vec{n}\sinh\alpha)$ şeklindedir.

Dual Kuaterniyonların Kutupsal Gösterim

Q_0 birim dual kuaterniyon olsun. Burada $\cos\alpha_0 = A_0$, $\sin\alpha_0 = {A_1}^2 + {A_2}^2 + {A_3}^2$ ve $\overrightarrow{S_0} = \frac{A_1 i + A_2 j + A_3 k}{\sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + {A_3}^2}}$ seçerek dual kuaterniyonun kutupsal gösterimini $Q_0 = \cos\alpha_0 + \overrightarrow{S_0}\sin\alpha_0$ şeklinde yazabiliriz.

Kompleks Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi

Q_c birim kompleks kuaterniyon olsun. Burada cosα= $\frac{Q_0}{\|Q\|}$ ve sinα= $\frac{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}}{\|Q_c\|}$ ve $\vec{n} = \frac{Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}}$ seçilerek kompleks kuaterniyonların kutupsal gösterimi $Q_c = \|Q_c\|(\cosh\alpha + \vec{n}\sinh\alpha)$ şeklinde ifade edilebilir.

Kuaterniyonların Kuvveti

Bir $q = S_q + V_q$ reel kuaterniyonunun, n-inci kuvveti $S_q = x$ ve $\langle V_q, V_q \rangle = y$ olmak üzere n çift ise,

$$q^n = \left[\sum_{r=0}^{n/2} \binom{n}{2r} x^{n-2r}(-y)^r\right] + \left[\sum_{r=0}^{n/2} \binom{n}{2r+1} x^{n-2r-1}(-y)^r\right] V_q,$$

ve n tek ise,

$$q^n = \left[\sum_{r=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2r} x^{n-2r}(-y)^r\right] + \left[\sum_{r=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2r+1} x^{n-2r-1}(-y)^r\right] V_q$$

ile bulunur.

De Moivre Formülü

Kutupsal gösterimi $q = \|q\|(\cos\alpha + \vec{n}\sin\alpha)$ biçiminde olan herhangi bir kuateriyon için k∈**Z** olmak üzere,

$q^k = \|q\|^k \cos(k\alpha) + \vec{n}\sin(k\alpha)$ eşitliği vardır.

Örnek: $q = 1 + 2i - j + 2k$ kuaterniyonunun 10’uncu kuvvetini hesaplayınız.

Çözüm: Öncelikle kuaterniyonu kutupsal formda yazalım. $S_q > 0$ olduğu için $\alpha = \arctan\frac{\|V_q\|}{S_q}$ =arctan3 olur.

$\|q\| = \sqrt{10}$ ve $\vec{n} = \frac{2i - j + 2k}{3}$ olmak üzere, $q = \sqrt{10}(\cos(\arctan 3) + \vec{n}\sin(\arctan 3))$ olacaktır. Buradan, $q^{10} = 10^5(\cos(\arctan 3) + \vec{n}\sin(\arctan 3))$ elde edilir.

Euler Formülü

Her $q \in \mathbb{H}$ birim kuaterniyonu, vektörel kısmı $\vec{n} = \frac{V_q}{\|V_q\|}$ olmak üzere, $e^{\vec{n}\alpha} = \cos\alpha + \vec{n}\sin\alpha$ eşitliği sağlanır.

Örnek: $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$ birim kuaterniyonunu üstel formda yazınız.

Çözüm: $\vec{n} = \frac{i - j + k}{\sqrt{3}}$ olmak üzere, $q = \cos 60 + \vec{n}\sin 60 = e^{\vec{n}\pi/3}$ şeklinde yazılabilir.

Reel Kuaterniyonların Kökleri

Bir $q = \|q\|(\cos\alpha + \vec{n}\sin\alpha)$ reel kuaterniyonu için, $p^m = q$

eşitliğini sağlayan p kuaterniyonlarına, q kuaterniyonunun m-inci dereceden kökleri denilir ve $p = \sqrt[m]{q}$

ile gösterilir. Kuaterniyonlar için De-Moivre formülleri kullanılarak bir kuaterniyonun kökleri basitçe elde edilebilir.

Kuaterniyonların n-inci Dereceden Köklerinin Bulunması

$q = \|q\|(\cos\alpha + \vec{n}\sin\alpha)$ reel kuaterniyonu için, $p^m = q$ eşitliğini sağlayan p kuaterniyonları:
$k = 0,1,2,\dots,m-1$ için,

$$p = \sqrt[m]{\|q\|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + \vec{n}\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right)$$

ile bulunur. Buna göre $q \notin \mathbb{R}$ için, bir kuaterniyonun m tane m-inci dereceden kökü vardır.